MA2 Příklady - funkce více proměnných 1 (2. a 3. cvičení):

1. Definiční obory funkcí více proměnných:
   Najděte definiční obory funkcí, u funkcí dvou proměnných se pokuste definiční obory načrtnout.
   Pokuste se také rozhodnout, zda nalezený definiční obor funkce je množina otevřená, resp.uzavřená, omezená, co je hranicí zkoumaného definičního oboru.

$$f(x,y)=x+\sqrt{y}\ ;\ f(x,y)=\sqrt{x+\sqrt{y}}\ ;\ f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}\ ;\ f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\ ;$$

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}\ ;\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}\ ;$$

$$f(x,y)=\ln(x+y)\ ;\ f(x,y)=\ln(xy)\ ;\ f(x,y)=\ln(xy-1);\ f(x,y)=\sqrt{\ln(xy)}\ ;$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\ln(xy)\ ;\ f(x,y)=\ln(y-x^2);\ f(x,y)=\arcsin\frac{y}{x+1};$$

$$f(x,y,z)=\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}\ ;\ f(x,y,z)=\sqrt{\ln(x^2+y^2+z^2)}\ ;\ f(x,y,z)=\sqrt{z-x^2-y^2}\ ;$$

$$f(x,y,z)=\frac{1}{1-(x^2+y^2-z^2)}\ .$$

2. „Grafy“ funkcí dvou proměnných:
   (pokuste se představit si „podobu“ grafu např. pomocí „vrstevnic“ a řezů třeba rovinou $x=0$)

$$f(x,y)=-2;\ ;\ f(x,y)=1-y;\ f(x,y)=2-x-y\ ;$$

$$f(x,y)=x^2+1;\ f(x,y)=4-y^2;\ f(x,y)=x^2+y^2\ ;\ f(x,y)=x^2+y^2+1\ ;\ f(x,y)=1-(x^2+y^2);$$

$$f(x,y)=x^2+4y^2;\ f(x,y)=y^2-x^2;$$

$$f(x,y)=\sqrt{9-(x^2+y^2)};\ f(x,y)=-\sqrt{4-(x^2+y^2)};\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\ ;$$

$$f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}\ ;\ f(x,y)=\exp(-x^2-y^2);$$

$$f(x,y)=\exp(x^2-y);\ f(x,y)=\ln(y-x^2)$$

3. Rozhodněte, zda následující funkce jsou spojité v R^2:

   a) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$; b) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$;

   c) $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$.

4. Lze následující funkce spojitě rozšířit na R^2 ?

   a) $f(x,y)=(x+y)^2.\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; b) $f(x,y)=\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; c) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$;

   d) $f(x,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$.

5. „Mechanické“ derivování:

Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu následujících funkcí (všude, kde existují) a ukažte, že smíšené derivace 2.řádu jsou záměnné:

a) $f(x,y)=:\ x^2+y\ ;\ x^2y\ ;\ x\sqrt{y}+\frac{y}{x}\ ;\ e^{x^2-y}\ ;\ e^{x^2y}\ ;\ e^{-\frac{x}{y}}\ ;\ x^y\ ;\ \ln(xy-1)\ ;\ \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\ ;$

$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ;\ arctg\frac{x+y}{x-y}\ ;$

b) $f(x,y,z)=:\ xy+yz+xz\ ;\ e^{xyz};\ x^{\frac{y}{z}}\ ;\ \arcsin(\frac{z^2}{x^2+y^2})\ ;$

c) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ je v $R^2-\{(0,0)\}$ řešením rovnice $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ (Laplaceova rovnice).

6. Diferenciál a jeho užití:

a) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\ln(y-x^2)$ je diferencovatelná v bodě $(1,2)$ a určete v tomto bodě diferenciál funkce f. Napište rovnici tečné roviny a normály ke grafu f v bodě $(1,2,0)$. Užitím lineární aproximace spočítejte přibližně $\ln(1{,}99-(1{,}02)^2)$.

b) Určete, kde má funkce $f(x,y,z)=(\frac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$ diferenciál a diferenciál v těchto bodech určete.

c) Ukažte, že pro malá x,y platí $arctg\frac{x+y}{1+xy}\cong x+y$.

d) Ukažte, že funkce $f(x,y)=\sqrt{|x.y|}$ není diferencovatelná v bodě $(0,0)$, i když existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.